受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

令和 6 年度 九州大学大学院 工学府

土木工学専攻

修士課程入学試験 問題冊子

数 学

注意事項

１．「始め」の合図があるまでは，試験問題冊子の中身を見てはいけません。

２．試験問題は【問題 1】から【問題 5】の計 5 問です。試験問題冊子は，12 ページ目まであります。

３．すべての問題を解答してください。

４．机の上に置ける物は，時計（携帯電話は不可），シャープペンシル（鉛筆でも可），消しゴム，受験票だけです。これら以外のものを机の上に置きたい場合は試験監督者の許可を得てください。許可無く机の上に置いた場合は，不正行為と見なし，退出を命じます。

５．試験時間中は携帯電話は教卓で預かり，保管しますので，必ず今の段階で提出して下さい。

６．試験問題冊子のホッチキスをはずしてはいけません。

７．「始め」の合図があったら，ただちにページの不足および印刷の不鮮明なところが無いことを確かめてください。もしあったら取り替えますから，手を挙げて申し出てください。

８．試験時間中に問題冊子表紙上方の指定の欄に受験番号と氏名を記入してください。

９．「解答止め」の合図があったら，ただちに解答の作成を止め，試験問題冊子および解答冊子を回収するまでそのまま待っていてください。

【問題 1】次の 2 変数実数値関数 $f(x,y)$ の極値を調べるための以下の問いに答えよ。(18 点)

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 + x^2y^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^2 - y^2$$

(1) x, yに関する 1, 2 階偏導関数をすべて示せ。ここで, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ とする。

(2) $f_x = 0$, $f_y = 0$ を同時に満たす解が極値の候補となる。候補となる点をすべて示せ。

(3) (2)で求めた候補点のすべてに対して,「極大値」,「極小値」,「極値ではない」のいずれかであるかを答えよ。またその判断理由を簡潔に説明せよ。

（計算用紙）

【問題 2】領域Dを，$D = \left\{(x, y, z) \mid z \leq \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$として定義する。以下の問いに答えよ。（18 点）

(1) 領域Dのxz面 (y=0) の概形を描け。解答用紙中のグラフ中に描き，領域内部を斜線で示すこと。

(2) 領域Dの体積を求めよ。

（計算用紙）

【問題 3】次のxおよびyに関する 2 次曲線（＊）について，(1)〜(5)に従い座標系を変換して標準形を導き，曲線の概形を図示しなさい。(25 点)

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 30x + 10y - 75 = 0 \qquad (*)$$

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。与えられた 2 次曲線を

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 75 = 0$$

と表す場合，2 行×2 列の対称行列A，および 2 次元ベクトル$\boldsymbol{b}$を求めなさい。ただし，左上添字tはベクトルの転置を表す（すなわち，${}^t\boldsymbol{x} = (x \quad y)$である）。

(2) 行列Aの固有値λ_1，λ_2（ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$とする）を求めなさい。また，それぞれの固有値に対する単位固有ベクトル$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$を求めよ。ただし，2 行×2 列の行列$P = (\boldsymbol{u_1} \quad \boldsymbol{u_2})$ が回転行列となるように定めること。

(3) Pによる座標変換$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$を考える。2 次曲線（＊）を座標変換することにより得られる式を，x'とy'を用いて表わしなさい。

(4) 上記(3)で求めた式は，さらに，座標の平行移動$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$を行うことで，$XY$座標系では原点を通る曲線として表される（$\alpha$と$\beta$は実数）。$\alpha$と$\beta$を求め，$X$と$Y$に関する式（標準形）を求めなさい。

(5) 以上の結果から，2 次曲線（＊）は下記の【選択肢】に示すいずれかの形となる。曲線の概形を図示しなさい。ただし，特徴的な点の座標を適宜，示すこと。

【選択肢】 楕円， 双曲線， 放物線， 平行な 2 直線， 交わる 2 直線

（計算用紙）

【問題 4】以下の常微分方程式を，与えられた境界条件（B.C.と記す）の下で解け。定められた解答用紙に解答せよ。（24 点）

(1) $x^2y' - 2xy + y^2 = 0$ （B.C. $x = 2,\ y = 4$）

(2) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$ （B.C. $x = 0,\ y = 1,\ y' = 1$）

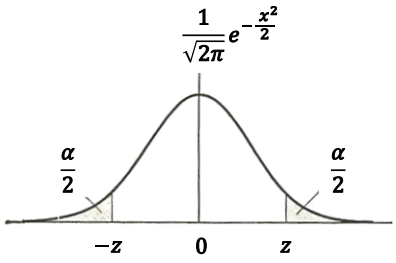
（計算用紙）

【問題 5】以下の問いに答えよ。(15 点)

(1) ある干潟において 7 地点に調査区画を設定し，底生生物の個体数を計測したところ，以下のようなデータを得た。このデータを用いて底生生物の個体数の母平均と母分散の不偏推定量を求めよ。

9 ，8 ，9 ，8 ，12 ，6 ，11 （単位:匹）

(2) 正規分布 $N(100, 2^2)$ に従う母集団の母平均 μ について，以下の仮説検定をせよ。ただし，右の附表を使ってよい。



陰影部の面積の和が α となる z の値

α	z
0.01	2.576
0.02	2.326
0.05	1.960
0.10	1.645
0.20	1.282

① 母集団から 25 個の標本 $(n = 25)$ を無作為抽出したときの標本平均 $\bar{X}$ が 101 のとき，

帰無仮説 H_0 : 母平均 μ は 100 である(μ= 100)。
対立仮説 H_1 : 母平均 μ は 100 ではない(μ≠100)。

とし，有意水準 $\alpha = 0.05$ で両側検定せよ。
解答にあたり，検定を行うための検定統計量と棄却域について説明すること。

② 母集団から 16 個の標本 $(n = 16)$ を無作為抽出したときの標本平均 $\bar{X}$ が 101 のとき，

帰無仮説 H_0 : 母平均 μ は 100 である(μ= 100)
対立仮説 H_1 : 母平均 μ は 100 より大きい(μ>100)

とし，有意水準 $\alpha = 0.01$ で片側検定せよ。
解答にあたり，検定を行うための検定統計量と棄却域について説明すること。

（計算用紙）

問題冊子

裏　面