

令和5年度 九州大学大学院 工学府

土木工学専攻

修士課程入学試験問題冊子

数学

注意事項

1. 「始め」の合図があるまでは、試験問題冊子の中身を見てはいけません。
2. 試験問題は【問題1】から【問題7】の計7問です。試験問題冊子は、5ページ目まであります。
3. すべての問題を解答してください。
4. 机の上に置ける物は、時計（携帯電話は不可）、シャープペンシル（鉛筆でも可）、消しゴム、受験票だけです。これら以外のものを机の上に置きたい場合は試験監督者の許可を得てください。許可無く机の上に置いた場合は、不正行為と見なし、退出を命じます。
5. 試験時間中は携帯電話は教卓で預かり、保管しますので、必ず今の段階で提出して下さい。
6. 試験問題冊子のホッチキスをはずしてはいけません。
7. 「始め」の合図があったら、ただちにページの不足および印刷の不鮮明なところが無いことを確かめてください。もしあったら取り替えますから、手を挙げて申し出てください。
8. 試験時間中に問題冊子表紙上方の指定の欄に受験番号と氏名を記入してください。
9. 「解答止め」の合図があったら、ただちに解答の作成を止め、試験問題冊子および解答冊子を回収するまでそのまま待っていてください。

【問題 1】 以下の問いに答えよ。(10 点)

(1) 次の関数 y を変数 x で微分せよ。

$$y = x^{\sin^{-1}x}$$

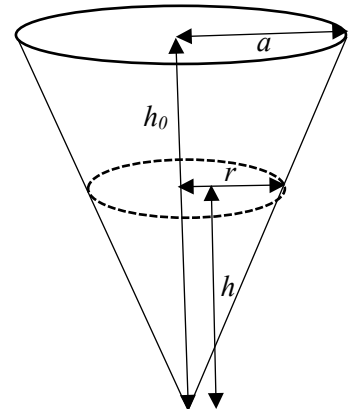
(2) 次の積分値を求めよ。(積分定数は C とする)。

$$\int \frac{1}{\cos x - 1} dx$$

【問題 2】 以下の問いに答えよ。(20 点)

右図のように上底面の半径が a (cm), 深さ h_0 (cm) の直円錐をひっくり返した容器に v (cm³/sec.) の割合で水を注入した。

円周率は π とする。ただし, 図中の r (cm) は, 直円錐の頂点を原点とした任意の深さ h (cm) の時の半径として便宜的に図中に示したものであり, 解答には使用しないこと。



(1) 深さ h ($< h_0$) (cm) 時の水面の上昇速度 $\frac{dh}{dt}$ (cm/sec.) を変数 h (cm) を使って示せ。

(2) 任意の時間 t (sec.) 後の水面の上昇速度を求めよ。

次に水をこの容器に満杯まで満たした後, 直円錐の頂点に面積 A (cm²) の小さな孔をあけて水を流し出した。ただし, 孔は深さ h_0 (cm) の位置にあるものとする。

(3) 深さが h (cm) の時の孔からの流出速度が $\sqrt{2gh}$ (cm/sec.) (g は重力加速度で定数) であった時, 水が全部流れ出るまでの時間 T (sec.) を求めよ。

【問題 3】 非同次項 $f(x)$ を含む関数 y に関する 1 階の常微分方程式を考える。また、ここでは境界条件を $y(0)=3$ とする。ただし、 $x \geq 0, y > 0$ とする。

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = f(x)$$

以下の問いに答えなさい。(15 点)

- (1) 非同次項が $f(x) = 0$ のとき (同次微分方程式) の解 $y(x)$ を求めよ。
- (2) 非同次項 $f(x) = \frac{1}{2}x$ のときの解 $y(x)$ を求めよ。
- (3) 前問(2) の解 (特解を含むすべての成分) と その特解のみの両者をグラフに示せ。なお、解を実線、特解は破線で示すこと。なお、グラフは各軸の交点があれば、交点を正しく示すこと。ただし、極値・変曲点までを示す必要はなく、概形がわかれば良いものとする。

【問題 4】

非同次項 $g(x)$ を含む関数 y に関する 2 階の常微分方程式を考える。また、ここでは境界条件を $y(0)=1, \frac{dy}{dx}(0)=0$ とする。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = g(x)$$

以下の問いに答えなさい。(15 点)

- (1) 非同次項が $g(x) = 0$ のとき (同次微分方程式) の解 $y(x)$ を求めよ。
- (2) 非同次項 $g(x) = x^2 - \frac{5}{8}$ のときの解 $y(x)$ を求めよ。

【問題 5】 次の行列について, 以下の問いに答えなさい。(15 点)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A のすべての固有値を求めなさい。

(2) A^n ($n = 1, 2, \dots$) を求めなさい。

【問題 6】 確率密度が

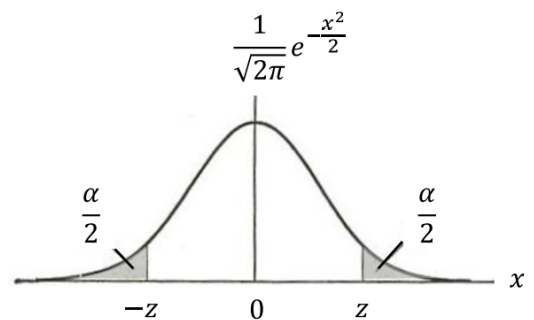
$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x < 0, a < x) \end{cases}$$

で与えられた確率分布について、以下の問いに答えなさい。(10 点)

- (1) 正の定数 a を求めよ。
- (2) 期待値 μ と分散 σ^2 を求めよ。

【問題 7】 コイのオスとメスの比率（性比）は 1 : 1 であるとする。今、A 池においてコイを 100 匹採捕して性別を調べたところ、70 匹がオスであったとき、以下の問いに答えよ。(15 点)

- (1) A 池のコイはオスに偏っているのではないかと考え、片側検定を行う。今、オスの比率を p とし、「帰無仮説 H_0 : A 池のコイの性比は 1 : 1 である ($p=1/2$)」とするとき、片側検定を行うための対立仮説 H_1 を立てよ。
- (2) 上記仮説を有意水準（危険率）5% で検定せよ。解答にあたり附表を使ってよい。



附表 陰影部の面積の和が α となる z の値

α	z
0.01	2.576
0.02	2.326
0.05	1.960
0.10	1.645
0.20	1.282

問題冊子裏面